DIMOSTRAZIONE

DI UNA PROPRIETÀ

DELL'ELICOIDE SGHEMBO

A PIANO DIRETTORE

ED

OSSERVAZIONI SOPRA UNA PROPOSIZIONE DEL TRATTATO DI STEREOTOMIA

DI LEROY

DEL PROFESSORE

GIUSEPPE BRUNO

TORINO

STAMPERIA REALE

1867.

DIMOSTRAZIONE

DI UNA PROPRIETÀ

DELL'ELICOIDE SGHEMBO

A PIANO DIRETTORE

ED

OSSERVAZIONI SOPRA UNA PROPOSIZIONE DEL TRATTATO DI STEREOTOMIA

DI LEROY

DEL PROFESSORE

GIUSEPPE BRUNO

TORINO
STAMPERIA REALE
1867.

DIMOSTRAZIONE

DI UNA PROPRIETÀ

DELL'ELICOIDE SGHEMBO A PIANO DIRETTORE

ED

OSSERVAZIONI SOPRA UNA PROPOSIZIONE

DEL TRATTATO DI STEREOTOMIA DI LEROY

---

1. La retta a sia l'asse di una superficie cilindrica di rivoluzione, sopra la quale è descritta l'elica e di passo h. Le linee a ed e sieno direttrici di un elicoide sghembo E, del quale tutte le generatrici rettilinee sono perpendicolari ad a. All'elicoide E sia circoscritta una superficie cilindrica C avente le sue generatrici rettilinee parallele ad una retta data qualunque l. Mi propongo di trovare la natura geometrica della linea ε di contatto fra C ed E.

2. Assunto per piano verticale di proiezione un piano parallelo alle rette a ed l, e preso per piano orizzontale di proiezione un piano perpendicolare ad a, il quale tagli l'elica e in un punto tale che il piano condotto per

esso punto e per la retta a sia parallelo ad l, ci occuperemo dapprima di definire qual linea sia la proiezione orizzontale ε' di ε.

La traccia orizzontale di a sia (fig. annessa) in a', e la retta stessa si proietti verticalmente secondo la $a''a'''$ perpendicolare in a'' alla linea di terra. L'elica e incontri il piano orizzontale di proiezione nel punto P, il quale si proietta verticalmente in P'' sulla linea di terra, e $PM'Q'N'$..... $P''M''Q''N''$..... sieno rispettivamente le proiezioni orizzontale e verticale dell'elica e sunnominata. Il punto Q di questa, che è proiettato orizzontalmente in Q' e verticalmente in Q'', sia posto ad un quarto di spira dal punto P. Le rette $Q'L'$, $Q''L''$ rappresentino le proiezioni orizzontale e verticale di una retta condotta per il punto Q parallelamente ad l: e questa retta abbia la sua traccia orizzontale nel punto L', del quale la proiezione verticale è il punto L'' della linea di terra.

Portato, a partire da Q', sopra $Q'L'$, dalla parte di Q' dalla quale si trova il punto P, la lunghezza $Q'q$ uguale al quadrante di circonferenza $Q'M'P$, e tirata $a'q$, la quale prolungata incontri in λ la retta $L'L''$, da λ si conduca una parallela alla linea di terra che vada a tagliare $a'Q'$ in γ.

Si dimostra (vedi Leroy, *Traité de Géométrie descriptive*. Paris, 1865, n[i] 627 e 631) che γ è la proiezione orizzontale del punto della generatrice dell'elicoide E proiettata orizzontalmente in $a'Q'$ e verticalmente in Q'', nel quale il piano tangente ad esso elicoide è parallelo ad l; epperò che γ è un punto di ε', e precisamente il punto di questa linea che giace sulla perpendicolare condotta da a' alla proiezione orizzontale di l.

Per trovare un altro punto qualunque della ε', quello,

ad esempio, che è collocato sul raggio $a'M'$ della circonferenza $PM'Q'N'$....., si deve fare una costruzione analoga alla precedente. Stabilita cioè la proiezione verticale M'' del punto dell'elica e che è proiettato orizzontalmente in M', dal punto M'' si tiri la $M''O''$ parallela alla linea di terra, e secante la $a''a'''$ in O'': poi, condotta in M' una tangente alla circonferenza $PM'Q'N'$...., e sviluppato, in $M'S$ su quella tangente, l'arco PM' della circonferenza ora nominata, che è proiezione orizzontale della porzione dell'elica e compresa fra il punto P ed il punto avente per proiezioni M' ed M'', si tiri la retta $a'S$. Quindi si determini la traccia orizzontale K' di una retta condotta parallelamente ad l pel punto che è proiettato orizzontalmente in a' e verticalmente in O''. Dopo per K' si conduca una parallela ad $a'M'$, la quale tagli $a'S$ in φ; e finalmente dal punto φ si abbassi la retta $\varphi\mu'$ perpendicolare in μ' ad $a'M'$: sarà μ' il punto cercato, ed il luogo dei punti determinati come μ', sarà la linea ε'.

Ora dico, che la $\varphi\mu'$, prolungata se fa d'uopo, passa pel punto γ. Invero, supposto che essa incontri la $a'Q'$ in γ_1, e condotte da K' le rette $K'K$ e $K'K''$ perpendicolari rispettivamente in K e K'' ad $a'M'$ ed alla linea di terra, per le costruzioni fatte e per la natura dell'elica, si hanno le uguaglianze seguenti:

$$\frac{a'\gamma_1}{a'K'} = \frac{a'\mu'}{K'K} = \frac{a'\mu'}{\varphi\mu'} = \frac{a'M'}{M'S} = \frac{a'M'}{\text{arc.}\,PM'},$$

$$a'K' = a''K'' = a''L''\,.\,\frac{a''O''}{a''Q''}$$

$$= \lambda\gamma\,.\,\frac{\text{arc.}\,PM'}{\text{arc.}\,PM'Q'} = \frac{\lambda\gamma}{Q'q}\,\text{arc.}\,PM' = \frac{a'\gamma}{a'Q'}\,\text{arc.}\,PM';$$

dalle quali, moltiplicandone fra di loro ordinatamente i primi e gli ultimi membri, si ricava

$$a'\gamma_1 = \frac{a'M'.a'\gamma}{a'Q'} = a'\gamma .$$

Il punto γ_1 si confonde dunque, come abbiamo asserito, con γ; epperò il luogo dei punti, come μ', ossia la proiezione orizzontale ε' di ε è una circonferenza descritta sopra $a'\gamma$ come diametro.

3. Alla conseguenza, a cui siamo giunti nel numero precedente, si arriva anche nel modo seguente, il quale ci contenteremo di accennare, non presentando esso, dopo quanto fu detto, difficoltà alcuna nel suo sviluppo.

Si prova dapprima che una superficie qualunque Γ cilindrica di rivoluzione ed avente per una sua generatrice rettilinea l'asse a dell'elicoide E definito al n° 1 taglia il detto elicoide secondo una linea ε_1 tale che tutti i piani tangenti ad E nei differenti punti di essa linea sono paralleli ad una stessa retta l_1: la qual retta l_1 è la tangente ad ε_1 in uno qualunque dei punti di questa linea che sono situati sulla generatrice rettilinea di Γ diametralmente opposta alla generatrice a della superficie stessa. In seguito si determina qual debba essere la lunghezza del diametro, e quale la posizione del centro della sezione retta di Γ, affinchè la l_1 sia parallela alla retta data l.

4. Dalla proposizione dimostrata al n° 2 segue che (vedi *Développements de Géométrie descriptive*, par M. Th. OLIVIER. Paris, 1843, chap. 1^er^, § III) la linea di contatto ε fra C ed E è un elica di passo $\frac{1}{2}h$, avente la sua traccia orizzontale in a', le spire volte nello stesso senso di destra

o di sinistra, come quelle della direttrice e dell'elicoide, e segnata sopra una superficie cilindrica di rivoluzione, la cui traccia orizzontale è il luogo dei punti come μ'.

5. Manifestamente il teorema ora enunciato riceve una sua applicazione nel tracciamento del contorno dell'ombra propria della porzione sghemba della superficie di una vite a pane quadrato illuminata da raggi paralleli fra loro. Questo contorno è, giusta quanto fu detto, composto di archi d'elica facilmente determinabili, qualunque sia la posizione della vite. Però, quando la direzione comune dei raggi luminosi fa coll'asse della vite un angolo minore di quello fatto dal detto asse colle tangenti alle eliche intersezioni delle porzioni sghembe della superficie del pane di vite colla superficie del cilindro massiccio che forma il nocciolo della vite, accade che il detto contorno dell'ombra propria più non esiste fisicamente, perchè il contorno dell'ombra propria dell'elicoide indefinito, al quale appartiene una faccia sghemba qualunque della vite, è in questo caso interamente compreso nell'interno del cilindro massiccio soprannominato. Nella nostra figura infatti, se la circonferenza $PM'Q'N'$ .... rappresenta la sezione retta del cilindro massiccio nocciolo della vite, e se una faccia sghemba di uno dei pani di questa appartenga all'elicoide E, e se finalmente la retta l, alla quale sono supposti paralleli i raggi luminosi, avesse tale posizione che fosse $Q'L'$ [illegible] $Q'q$, sarebbe $a'\gamma < a'Q'$, e quindi nissun punto della faccia sghemba soprannominata sarebbe nella oscurità, astrazione fatta dalle ombre proiette.

6. Che, allorquando la luce cade sulla vite in certe direzioni, più non esista sulla superficie sghemba del pane o dei pani di essa contorno d'ombra propria, si trova dimostrato, in un modo alcun poco differente dal

che nella fatta ipotesi di $\omega > \alpha$ « *la séparation d'ombre et de lumière deviendrait une* courbe fermée. »

La frequenza, colla quale dagli studiosi è consultato quell'eccellente e meritamente stimato trattato di Stereotomia, mi fece parere conveniente che fosse notato un errore che vi si trova.

α'''
N''
Ω''
M''
o''
L''
P''
K''
α''
N'
P
K'
α'
S
φ
K
μ'
M'
L'
Ω'
q
λ
γ
γ,